

# TD5 - Correction

Aymeric Jan ([aymeric.jan@univ-paris1.fr](mailto:aymeric.jan@univ-paris1.fr))

April 2024

## Exercice 1

### Question 1.a

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^* = Tx^{(k)} + c - x^*$$

Or, par définition,  $Tx^* + c = x^*$ , d'où

$$Tx^{(k)} + c - x^* = Tx^{(k)} + c - (Tx^* + c) = T(x^{(k)} - x^*) = Te^{(k)}$$

En développant, on a

$$e^{(k+1)} = Te^{(k)} = T^2e^{(k-1)} = \dots = T^{k+1}e^{(0)}$$

### Question 1.b

D'après le TD0, il y a équivalence entre les propositions suivantes

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \lim_{k \rightarrow \infty} B^k x = 0 \Leftrightarrow \rho(B) < 1$$

Ainsi, la suite  $(x_k)_k$  converge si et seulement si  $\rho(T) < 1$

### Question 1.c

D'après la question 1.a, on a  $e^{(k)} = T^k e^{(0)}$

Ainsi

$$\|e^{(k)}\|_2 = \|T^k e^{(0)}\|_2 \leq \|T^k\|_2 \times \|e^{(0)}\|_2 \leq \|T\|_2^k \times \|e^{(0)}\|_2$$

Or, par définition

$$\|T\|_2^2 = \rho(T^T T)$$

Donc

$$\|T\|_2^k \times \|e^{(0)}\|_2 = \sqrt{\rho(T^T T)}^k \times \|e^{(0)}\|_2 = \rho(T^T T)^{k/2} \times \|e^{(0)}\|_2$$

### Question 2.a

$$M = A + N \Leftrightarrow M^T = A^T + N^T \Leftrightarrow M^T + N = A^T + N^T + N$$

Or,  $A^T$  est symétrique car  $A$  l'est, et  $N^T + N$  est symétrique.

De plus, la somme de deux matrices symétriques est symétrique, donc  $M^T + N$  est symétrique.

### Question 2.b

### Question 3

La décomposition de Jacobi s'écrit telle que

$$A = M - N \quad M = D \quad N = -(L + U)$$

La suite est ainsi définie par

$$Ax = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

Ce qui nous donne la suite

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c \quad T = M^{-1}N \quad c = M^{-1}b$$

Dans notre cas, calculons  $T$

$$t_{i,j} = \sum_k d_{i,k} \times (-a_{k,j})$$

Or  $d_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$  donc

$$t_{i,j} = -d_{i,i}a_{i,j} = -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}$$

Ce qui nous donne

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \dots & -\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}} & 0 & \ddots & \dots \\ \vdots & & \ddots & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} & \dots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} & 0 \end{bmatrix}$$

La méthode converge si  $\rho(T) < 1$ , ce qui est équivalent à  $\|T\| < 1$ .

Prenons la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$  définie de la manière suivante

$$\|T\|_\infty = \max_i \sum_j |t_{i,j}|$$

Ainsi, on a

$$\|T\|_\infty = \max_i \sum_j \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right| = \max_i \frac{1}{|a_{i,i}|} \sum_j |a_{i,j}|$$

Or,  $A$  est à diagonale dominante donc on a

$$\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$$

D'où

$$\max_i \frac{1}{|a_{i,i}|} \sum_j |a_{i,j}| < \max_i \frac{|a_{i,i}|}{|a_{i,i}|} = 1$$

Donc on a bien au moins une norme  $\|\cdot\|$  pour laquelle  $\|T\| < 1$  donc la méthode de Jacobi converge avec cette matrice.

#### Question 4

La décomposition de Gauss-Seidel est la suivante

$$A = M - N \quad M = D - L \quad N = U$$

Ainsi, on a

$$T = M^{-1}N = (D - L)^{-1}U$$

Comme  $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ , d'après la question 2.a, c'est aussi le cas pour  $M^T + N$ . Montrons de plus que  $M^T + N$  est définie positive.

$$M^T + N = (D - L)^T + U = D - L^T + U = D$$

La dernière égalité vient du fait que si  $A$  est symétrique, alors  $L^T = U$

$A$  étant symétrique définie positive, sa diagonale l'est aussi, donc  $M^T + N$  est symétrique définie positive.

On peut donc utiliser le résultat de la question 2.b qui nous donne  $\rho(M^{-1}N) = \rho(T) < 1$  et donc que la méthode de Gauss-Seidel converge.

#### Question 5

Cette fois-ci la décomposition est la suivante

$$A = M - N \quad M = \frac{1}{\omega}D - L \quad N = \frac{1-\omega}{\omega}D + U$$

Calculons  $M^T + N$

$$M^T + N = \frac{1}{\omega}D - L^T + N = \frac{1-\omega}{\omega}D + U = \frac{2-\omega}{\omega}D$$

Ainsi, comme  $A$  est symétrique définie positive,  $\frac{2-\omega}{\omega}D$  l'est si et seulement si  $\frac{2-\omega}{\omega} > 1$

$$\frac{2-\omega}{\omega} > 1 \Leftrightarrow 0 < \omega < 2$$

Ainsi, si  $A \in \mathcal{S}_n^{++}$  et si  $0 < \omega < 2$ , alors la méthode de relaxation converge.

## Exercice 2

La matrice n'est ni symétrique ni à diagonale strictement dominante, il faut donc calculer les valeurs propres.

Pour Jacobi, on trouve

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculons  $\det(T_J - \lambda I)$

$$T_J - \lambda I = - \begin{bmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(T_J - \lambda I) = \lambda^3$$

Ainsi, les valeurs propres sont  $\Lambda = (0, 0, 0)$  donc la méthode converge.

De même avec  $T_{GS}$

$$T_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculons  $\det(T_{GS} - \lambda I)$

$$T_{GS} - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(T_J - \lambda I) = -\lambda(2 - \lambda)^2$$

on trouve  $\Lambda = (0, 2, 2)$  donc  $\rho(T_{GS}) = 2$  donc la méthode diverge.

## Exercice 3

### Question 1

La matrice  $A$  est à diagonale strictement dominante (avec des coefficients diagonaux positifs) donc elle est définie positive.

### Question 2

Comme elle est à diagonale strictement dominante, Jacobi converge d'après la question 3 de l'exercice 1.

### Question 3

Comme elle est symétrique définie positive, Gauss-Seidel converge d'après la question 4 de l'exercice 1.

#### Question 4

Commençons par calculer  $T_J$

$$T_J = -D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous donne

$$\det(T_J - \lambda I) = \left( \lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \Lambda = (-1/2, 1/2)$$

Ainsi  $\rho(T_J) = \frac{1}{2}$

Pour  $T_{GS}$  on obtient

$$T_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

D'où

$$\det(T_{GS} - \lambda I) = -\lambda \left( -\lambda + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \Lambda = (0, 1/4)$$

Ainsi  $\rho(T_{GS}) = \frac{1}{4}$

Donc on a bien

$$(\rho(T_J))^2 = \rho(T_{GS})$$

#### Question 5

D'après l'exercice 1 nous avons

$$\|e^{(k)}\|_2 \leq \rho(T^T T)^{k/2} \times \|e^{(0)}\|_2$$

Soit encore

$$\frac{\|e^{(k)}\|_2}{\|e^{(0)}\|_2} \leq \rho(T^T T)^{k/2}$$

Il suffit donc de choisir  $\epsilon$  tel que

$$\rho(T^T T)^{k/2} \leq \epsilon$$

Pour Jacobi, la matrice  $T_J$  est symétrique donc  $\rho(T_J^T T_J) = \rho(T_J)^2$  donc

$$\rho(T_J^T T_J)^{k/2} = \left( \frac{1}{2} \right)^k$$

Cependant,  $T_{GS}$  ne l'est pas, il faut donc calculer  $\rho(T_{GS}^T T_{GS})$

On obtient

$$T_{GS}^T T_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5/16 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(T_{GS}^T T_{GS} - \lambda I) = -\lambda \left( -\lambda + \frac{5}{16} \right)$$

Ainsi,  $\rho(T_{GS}^T T_{GS}) = \frac{5}{16}$

Et donc

$$\rho(TGS^T T_{GS})^{k/2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^k$$