

## Systèmes linéaires : méthodes itératives

**Exercice 1.** On souhaite résoudre le système  $A\vec{x} = \vec{b}$  par une méthode itérative. On construit une suite de vecteurs  $(\vec{x}^{(k)})_{k \geq 0}$ , avec  $\vec{x}_0$  donné et

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c},$$

où  $T$  est une matrice qui dépend de  $A$  et  $\vec{c}$  un vecteur dépendant de  $A$  et de  $\vec{b}$ .

1. Soit  $\vec{x}^*$  la solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ , on pose  $\vec{e}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*$ , l'erreur à l'itération  $k$ .

(a) Montrer que

$$\vec{e}^{(k+1)} = T\vec{e}^{(k)},$$

et en déduire que  $\vec{e}^{(k)} = T^k\vec{e}^{(0)}$ .

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante (faisant intervenir le rayon spectral de  $T$ ) pour que la suite  $(\vec{x}^{(k)})$  converge vers  $\vec{x}^*$ .

(c) Montrer que

$$\|\vec{e}^{(k)}\|_2 \leq (\rho(T^T T))^{\frac{k}{2}} \|\vec{e}^{(0)}\|_2.$$

2. Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , une matrice carrée symétrique définie positive. Soit la décomposition  $A = M - N$ , avec  $M$  inversible.

(a) Montrer que la matrice  $(M^T + N)$  est symétrique.

(b) Montrer que si  $(M^T + N)$  est définie positive, alors  $\rho(M^{-1}N) < 1$ .

3. Montrer que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge.

4. Montrer que si  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors la méthode de Gauss-Seidel converge.

5. Montrer que si  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et si  $0 < \omega < 2$ , alors la méthode de relaxation converge.

**Exercice 2.** Soit  $A$  la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étudier la convergence de la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel.

**Exercice 3.**

Soit  $A$ , la matrice tridiagonale suivante :

$$\begin{cases} A_{i,i} = 2, & 1 \leq i \leq n, \\ A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1, & 1 \leq i \leq n-1, \\ A_{i,j} = 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et  $\vec{b} = (1, 0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ .

1. Montrer que la matrice  $A$  est définie positive.
2. La méthode de Jacobi converge-t-elle ?
3. La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?
4. Dans le cas  $n = 2$ , vérifier la relation suivante :

$$(\rho(T_J))^2 = \rho(T_{GS}),$$

où  $T_J$  et  $T_{GS}$  sont les matrices d'itération associées aux méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel, respectivement. Que peut-on en déduire sur la convergence/divergence des deux méthodes ? (*Remarque* : ce résultat est valable pour les matrices tridiagonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

5. Déterminer une condition suffisante sur le nombre d'itération  $k$  dans le cas de l'algorithme de Jacobi et de celui de Gauss-Seidel pour que

$$\frac{\|\vec{e}^{(k)}\|_2}{\|\vec{e}^{(0)}\|_2} \leq \varepsilon.$$

où  $\vec{e}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*$ , l'erreur à l'itération  $k$  et  $\varepsilon$  une précision donnée

6. Programmer une fonction qui prend en entrée une matrice  $A$ , un vecteur  $\vec{b}$  et un vecteur initial  $\vec{x}_0$  et calcule la solution du système  $A\vec{x} = \vec{b}$  par la méthode de Jacobi.
7. Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.
8. Évaluer le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une précision fixée (e.g.,  $10^{-2}$ ) et comparer les deux méthodes pour différentes valeurs de  $n$ .