

Notes TP1

Aymeric JAN

February 1, 2023

1 Système linéaire

1.1 Rappel sur les systèmes linéaires

Un système linéaire est un système de plusieurs équations, chacune étant des combinaisons linéaires de plusieurs inconnues. Exemple:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 0x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Un tel système comme celui décrit dans (1), peut s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$Ax = b, \quad (2)$$

avec $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ une matrice réelle de taille 3×3 , $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ un vecteur de taille 3 et b un autre vecteur de taille 3.

Un tel système admet une unique solution si et seulement si le déterminant de la matrice A est non nul. Dans notre cas, on a $\det(A) = -5$. Ainsi, il existe une seule et unique solution x à notre équation.

1.2 Résolution matricielle des systèmes linéaires

Voyons la résolution d'un système linéaire du type $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

On procède par combinaison linéaire des lignes de notre matrice et de notre vecteur:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right)}_{(A|b)} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3 \times L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{-5} \times L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (4)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2 \times L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (5)$$

On a alors le système suivant: $A'x = b'$ avec A' la matrice identité, soit $x = b'$. Ainsi on devine:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$