Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Normes matricielles induites

Soit $E_n = \mathbb{K}^n$ l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\|\cdot\|_E$ une norme vectorielle sur E_n. On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices de taille $m \times n$. On appelle norme matricielle induite par (ou subordonnée à) la norme vectorielle $\|\cdot\|_{E_n}$ l'application de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\|A\| = \max_{\|x\|_{E_n}=1} \|Ax\|_{E_m}, \quad A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}).$$

Exercice 1. Montrer qu'une norme matricielle induite définie une norme dans l'espace vectoriel de matrices.

Exercice 2. Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme induite, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, on a

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{0\leq\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

Exercice 3. Montrer que pour toute norme matricielle induite, on a
a) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \forall x \in E_n$;
b) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, pour toutes $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
On considère dans E_n, les normes vectorielles suivantes

$$\|x\|_1 = \sum_{1\leq i\leq n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leq i\leq n} |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Exercice 4. Soient $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, avec U et V unitaires (i.e., $\|Bx\|_2 = \|x\|_2, \forall x \in E_n$). Montrer que

$$\|VAU\|_2 = \|A\|_2.$$

avec $\|\cdot\|_2$ la norme matricielle induite par la norme 2.

Suites de matrices

Exercice 5. Soit B une matrice carrée. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$;
b) $\lim_{k\to\infty} B^k x = 0$ pour tout $x \in E_n$;
c) $\rho(B) < 1$;
d) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée.

Indication : démarche *a)* $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c)* $\Rightarrow$ *d)* $\Rightarrow$ *a)*.

Exercice 6. Soit B une matrice carrée. Soit $S_k = \sum_{l=0}^{k} B^l$ ($B^0 = I_n$). Montrer que S_k converge vers $(I_n - B)^{-1}$ si et seulement si $\rho(B) < 1$.

Conditionnement d'une matrice et applications aux systèmes linéaires

Soit A une matrice carrée inversible, le conditionnement de A, noté $\mathrm{Cond}(A)$, est le nombre définie par

$$\mathrm{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|,$$

où $\|\cdot\|$ une norme matricielle. On notera $\mathrm{Cond}_n(A)$ le conditionnement calculé avec la norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|_n$, $n = 1, 2$ ou ∞.

Exercice 7. Soit A une matrice carrée réelle. Démontrer les propriétés suivantes :

a) $\mathrm{Cond}(A) \geq 1$;

b) $\mathrm{Cond}(A^{-1}) = \mathrm{Cond}(A)$;

c) $\mathrm{Cond}(\alpha A) = \mathrm{Cond}(A), \alpha \in \mathbb{R}$;

d) Si A est symétrique, $\mathrm{Cond}_2(A) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$;

e) Si P est une matrice orthogonale, $\mathrm{Cond}_2(PA) = \mathrm{Cond}_2(A)$.

(avec $\lambda_{\max}$ et $\lambda_{\min}$ la plus grande et la plus petite valeur propre de A).

Exercice 8. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible et $\vec{b}$ et $\vec{\Delta b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soient $\vec{x}$ et $\hat{\vec{x}}$ les solutions des systèmes linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ et $A\hat{\vec{x}} = \vec{b} + \vec{\Delta b}$, respectivement. On pose $\vec{\Delta x} = \hat{\vec{x}} - \vec{x}$. Montrer que

$$\frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\vec{\Delta b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Exercice 9. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ 0.11 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2.1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Delta b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

Calculer les solutions exactes $\vec{x}$ et $\hat{\vec{x}}$ des systèmes $A\vec{x} = \vec{b}$ et $A\hat{\vec{x}} = \vec{b} + \vec{\Delta b}$, respectivement. Comparer. Que peut-on dire du conditionnement de la matrice A ?