

Corrigé partiel MN 2022

Aymeric Jan (aymeric.jan@univ-paris1.fr)

May 3, 2024

Résultats importants

Proposition 0.1 (Rayon spectral et produit de matrices). *Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors AB est semblable à BA . De plus, on a*

$$\rho(AB) = \rho(BA)$$

Proof. Montrons d'abord que AB est semblable à BA

$$AB = AB(AA^{-1}) = A(BA)A^{-1}$$

De plus, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc même rayon spectral. \square

Proposition 0.2 (Commutants d'une matrice). *Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, M commute avec $(I_n + M)^{-1}$.*

Proof.

$$(I_n + M)(I_n + M)^{-1} = (I_n + M)^{-1} + M(I_n + M)^{-1}$$

Or, comme $(I_n + M)^{-1}$ commute avec $(I_n + M)$, on a aussi

$$(I_n + M)(I_n + M)^{-1} = (I_n + M)^{-1}(I_n + M) = (I_n + M)^{-1} + (I_n + M)^{-1}M$$

Ainsi, on peut écrire

$$(I_n + M)^{-1} + (I_n + M)^{-1}M = (I_n + M)^{-1} + M(I_n + M)^{-1}$$

Enfin, en simplifiant à gauche et à droite par $(I_n + M)^{-1}$, on obtient

$$(I_n + M)^{-1}M = M(I_n + M)^{-1}$$

\square

Proposition 0.3 (Majoration du rayon spectral). *Pour toute norme induite $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_n}$, et pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

$$\rho(A) \leq \|A\|_{\mathcal{M}_n}$$

Proof. Soit λ_{max} la plus grande des valeurs propres de A , et v un vecteur propre associé

$$\|Av\| = \|\lambda_{max}v\| = |\lambda_{max}| \times \|v\| \tag{1}$$

Or, par propriété des normes induites

$$\|Av\| \leq \|A\|_{\mathcal{M}_n} \times \|v\| \tag{2}$$

En combinant les équations (1) et (2), on obtient

$$|\lambda_{max}| \times \|v\| \leq \|A\|_{\mathcal{M}_n} \times \|v\| \Leftrightarrow |\lambda_{max}| \leq \|A\|_{\mathcal{M}_n}$$

Ce qui donne

$$\rho(A) \leq \|A\|_{\mathcal{M}_n}$$

□

Proposition 0.4 (Rayon spectral matrice symétrique). *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors*

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

Exercice 1

Question 1

Le système s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Question 2

Le nombre de solutions à un système de la forme $Ax = b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ dépend uniquement de A et non de b .

Un tel système admet une seule et unique solution si A est inversible.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 24 \neq 0$$

Ainsi, $\det(A) \neq 0$ donc A est inversible et le système admet une seule et unique solution.

Question 3a

La matrice A admet une factorisation LU si et seulement si toutes les sous-matrices principales de A sont inversibles.

$$A_1 = 1 \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad A_3 = A$$

A_1 est inversible car il s'agit d'un réel non nul. De plus, nous avons déjà montré que A était inversible donc A_3 l'est aussi.

Calculons le déterminant de A_2

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - 2 \times 2 = 2 \neq 0$$

Toutes les sous matrices principales de A sont inversibles, ainsi, A admet une factorisation LU.

De plus, en ajoutant la contrainte suivante: $\forall i, L_{i,i} = 1$, la factorisation LU est unique.

La matrice A admet donc une unique factorisation LU.

Question 3b

Nous pouvons expliciter la factorisation comme suit

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} \\ 0 & 0 & U_{3,3} \end{bmatrix}$$

Après avoir effectué le produit matriciel, on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ L_{2,1}U_{1,1} & L_{2,1}U_{1,2} + U_{2,2} & L_{2,1}U_{1,3} + U_{2,3} \\ L_{3,1}U_{1,1} & L_{3,1}U_{1,2} + L_{3,2}U_{2,2} & L_{3,1}U_{1,3} + L_{3,2}U_{2,3} + U_{3,3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Il suffit ensuite d'identifier les différents termes des deux matrices avec la liste suivantes d'équations provenant de (3)

$$\begin{cases} U_{1,1} = 1, & U_{1,2} = 2, & U_{1,3} = -3 \\ L_{2,1}U_{1,1} = 2 \Rightarrow L_{2,1} = \frac{2}{U_{1,1}} = 2 \\ L_{3,1}U_{1,1} = 1 \Rightarrow L_{3,1} = 1 \\ L_{2,1}U_{1,2} + U_{2,2} = 6 \Rightarrow U_{2,2} = 6 - L_{2,1}U_{1,2} = 2 \\ L_{2,1}U_{1,3} + U_{2,3} = -5 \Rightarrow U_{2,3} = 1 \\ L_{3,1}U_{1,2} + L_{3,2}U_{2,2} = -2 \Rightarrow L_{3,2} = \frac{-2 - L_{3,1}U_{1,2}}{U_{2,2}} = -2 \\ L_{3,1}U_{1,3} + L_{3,2}U_{2,3} + U_{3,3} = 7 \Rightarrow U_{3,3} = 7 - L_{3,1}U_{1,3} - L_{3,2}U_{2,3} = 12 \end{cases}$$

Pour résumer, la factorisation obtenue est la suivante:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Passons à la résolution du système $Ax = b$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Commençons par résoudre le premier système $Ly = b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 2 & 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}}_{(L|b)} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2 \times L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 1 & -2 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2 \times L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Réolvons maintenant le second système $Ux = y$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 12 & | & -5 \end{pmatrix}}_{(U|y)} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3/12} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5/12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & -31/12 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5/12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -31/24 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5/12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 3 \times L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -31/24 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5/12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 28/12 \\ 0 & 1 & 0 & | & -31/24 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5/12 \end{pmatrix}$$

On a résolu le système en entier et obtenu la valeur de x

$$x = \begin{bmatrix} 28/12 \\ -31/24 \\ -5/12 \end{bmatrix}$$

Question 3c

On note N_{MD} le nombre de multiplications/divisions et N_{AS} le nombre d'additions/soustractions

Comptons le nombre d'opérations pour la résolution du système $Ly = b$

Pour $i = 2$ à n on effectue les opérations suivantes

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} y_j$$

Pour y_i on a donc $N_{MD}^{(1)}(y_i) = i - 1$ et $N_{AS}^{(1)}(y_i) = i$

En sommant sur toutes les valeurs de i , on obtient

$$N_{MD}^{(1)} = \sum_{i=2}^n (i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \quad (4)$$

$$N_{AS}^{(1)} = \sum_{i=2}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (5)$$

Comptons à présent le nombre d'opérations pour la résolution du système $Ux = y$

Pour $i = 1$ à $n-1$ on effectue les opérations suivantes

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n U_{i,j}y_j}{U_{i,i}}$$

Pour x_i on a donc $N_{MD}^{(2)}(x_i) = 1 + (n-1)$ et $N_{AS}^{(2)}(x_i) = 1 + (n-1)$

En sommant sur toutes les valeurs de i on obtient donc

$$\begin{aligned} N_{MD}^{(2)} &= N_{AS}^{(2)} = \sum_{i=2}^n 1 + (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} 1 + (n-(i+1)) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

Au total, en combinant les résultats des équations (4), (5) et (6), on obtient

$$N_{MD} = N_{MD}^{(1)} + N_{MD}^{(2)} = n(n-1)$$

$$N_{AD} = N_{AD}^{(1)} + N_{AD}^{(2)} = \frac{n(n+1) + n(n-1)}{2} = n^2$$

Le nombre d'opérations pour résoudre un système avec la factorisation LU est ainsi en $O(n^2)$.

Exercice 3

Question 1

La suite $x^{(k)}$ est définie par les deux équations suivantes

$$\begin{cases} (D+H)x^{(k+\frac{1}{2})} = -Vx^{(k)} + b \\ (D+V)x^{(k+1)} = -Hx^{(k+\frac{1}{2})} + b \end{cases}$$

De la première équation, on extrait la valeur de $x^{(k+\frac{1}{2})}$, et de la seconde, la valeur de $x^{(k+1)}$

$$\begin{cases} x^{(k+\frac{1}{2})} = -(D+H)^{-1}Vx^{(k)} + (D+H)^{-1}b \\ x^{(k+1)} = -(D+V)^{-1}Hx^{(k+\frac{1}{2})} + (D+V)^{-1}b \end{cases} \quad (7)$$

En combinant les deux équations de (7), on obtient

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= -(D+V)^{-1}H\left(-(D+H)^{-1}Vx^{(k)} + (D+H)^{-1}b\right) + (D+V)^{-1}b \\
&= (D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}Vx^{(k)} - (D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}b + (D+V)^{-1}b \\
&= (D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}Vx^{(k)} + (D+V)^{-1}(I_n - H(D+H)^{-1})b
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite est de la forme $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$, avec

$$\begin{cases} T = (D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V \\ c = (D+V)^{-1}(I_n - H(D+H)^{-1})b \end{cases} \quad (8)$$

Une telle suite converge si et seulement si $\rho(T) < 1$, soit

$$\boxed{\rho\left((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\right) < 1} \quad (9)$$

Question 2a

Posons $B = D^{-1}H$ et $C = D^{-1}V$, ce qui nous donne également

$$H = DB \quad V = DC \quad (10)$$

Réécrivons la matrice T obtenue à l'équation (8) grâce à (10)

$$\begin{aligned}
(D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V &= (D+DC)^{-1}DB(D+DB)^{-1}DC \\
&= [D(I_n + C)]^{-1}DB[D(I_n + B)]^{-1}DC \\
&= (I_n + C)^{-1}D^{-1}DB(I_n + B)^{-1}D^{-1}DC \\
&= (I_n + C)^{-1}B(I_n + B)^{-1}C
\end{aligned} \quad (11)$$

De la dernière égalité dans l'équation (11), on peut déduire

$$\rho\left((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\right) = \rho\left((I_n + C)^{-1}B(I_n + B)^{-1}C\right) \quad (12)$$

Dans notre cas, $(I_n + C)^{-1}$ est inversible, on peut donc utiliser la proposition 0.1 pour écrire

$$\rho\left((I_n + C)^{-1}B(I_n + B)^{-1}C\right) = \rho\left(B(I_n + B)^{-1}C(I_n + C)^{-1}\right) \quad (13)$$

Ainsi, les résultats des équations (12) et (13) nous donnent

$$\boxed{\rho\left((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\right) = \rho\left(B(I_n + B)^{-1}C(I_n + C)^{-1}\right)} \quad (14)$$

Question 2b

Par hypothèse, H et V sont symétriques. Par ailleurs, $B = D^{-1}H = c^{-1}H$ avec $c \in \mathbb{R}^*$ donc B est symétrique, de même pour C .

De plus, B étant symétrique, $(I_n + B)$ l'est aussi, et $(I_n + B)^{-1}$ aussi à fortiori.

Montrons que $B(I_n + B)^{-1}$ est symétrique

$$(B(I_n + B)^{-1})^T = ((I_n + B)^{-1})^T B^T = (I_n + B)^{-1} B$$

De plus, d'après la proposition 0.2, B commute avec $(I_n + B)^{-1}$

Cela nous donne

$$(B(I_n + B)^{-1})^T = B(I_n + B)^{-1}$$

Ainsi, $B(I_n + B)^{-1}$ est symétrique, de même pour $C(I_n + C)^{-1}$.

D'après l'équation (14) de la question précédente, on a

$$\rho((D + V)^{-1}H(D + H)^{-1}V) = \rho(B(I_n + B)^{-1}C(I_n + C)^{-1})$$

En utilisant la proposition 0.3, on peut écrire

$$\rho(B(I_n + B)^{-1}C(I_n + C)^{-1}) \leq \|B(I_n + B)^{-1}C(I_n + C)^{-1}\|_2$$

Par propriété des normes induites on a

$$\|B(I_n + B)^{-1}C(I_n + C)^{-1}\|_2 \leq \|B(I_n + B)^{-1}\|_2 \times \|C(I_n + C)^{-1}\|_2 \quad (15)$$

De plus, $B(I_n + B)^{-1}$ et $C(I_n + C)^{-1}$ étant symétriques, on peut utiliser la propriété 0.4

$$\|B(I_n + B)^{-1}\|_2 = \rho(B(I_n + B)^{-1}) \quad \|C(I_n + C)^{-1}\|_2 = \rho(C(I_n + C)^{-1}) \quad (16)$$

Ainsi, d'après les équations (15) et (16), on obtient

$$\rho((D + V)^{-1}H(D + H)^{-1}V) \leq \rho(B(I_n + B)^{-1}) \rho(C(I_n + C)^{-1}) \quad (17)$$

Question 2c

Soit v un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ . On a par définition

$$Bv = \lambda v \quad (18)$$

On a également

$$(I_n + B)v = (1 + \lambda)v \Leftrightarrow v = (1 + \lambda)(I_n + B)^{-1}v \Leftrightarrow Bv = (1 + \lambda)B(I_n + B)^{-1}v \quad (19)$$

En combinant les équations (18) et (19), on obtient

$$\lambda v = (1 + \lambda)B(I_n + B)^{-1}v \Leftrightarrow \frac{\lambda}{1 + \lambda}v = B(I_n + B)^{-1}v$$

Ainsi, $\frac{\lambda}{(1 + \lambda)}$ est une valeur propre de $B(I_n + B)^{-1}$ associée au vecteur propre v .

Or, par hypothèse, $\rho(B(I_n + B)^{-1}) < 1$ donc $\left| \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right| < 1$.

Dans les cas où $\lambda > 0$ et $\lambda < -1$, on obtient la condition $\lambda < \lambda + 1$ qui n'apporte rien.

Le cas intéressant est celui où $\lambda \in]-1, 0]$, qui nous donne

$$\frac{-\lambda}{1 + \lambda} < 1 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} > 0 \quad (20)$$

L'inégalité (20) est équivalente à l'affirmation: $\frac{1}{2}I_n + B$ définie positive.

Ce qui nous donne

$$\boxed{\rho(B(I_n + B)^{-1}) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}I_n + B \text{ est définie positive.}} \quad (21)$$

Ainsi, si $\frac{1}{2}I_n + B$ et $\frac{1}{2}I_n + C$ sont définies positives, grâce à (21), on a alors

$$\rho(B(I_n + B)^{-1}) \rho(C(I_n + C)^{-1}) < 1$$

et donc convergence de la méthode itérative d'après (9) et (17).

Par ailleurs, $\frac{1}{2}I_n + B$ est définie positive si et seulement si $D(\frac{1}{2}I_n + B)$ l'est aussi, car $D = cI_n$ avec $c > 0$.

En développant, on obtient

$$D\left(\frac{1}{2}I_n + B\right) = \frac{1}{2}D + DB = \frac{1}{2}D + H \quad (22)$$

On en déduit donc

$$\frac{1}{2}I_n + B \text{ est définie positive} \Leftrightarrow \frac{1}{2}D + H \text{ est définie positive}$$

Au final, la méthode itérative converge dès que les matrices $\frac{1}{2}D + H$ et $\frac{1}{2}D + V$ sont définies positives.