



<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

← Cocher votre numéro d'étudiant ci-contre (premier chiffre dans la première colonne, etc.), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous en **MAJUSCULES**.

NOM :
.....
PRÉNOM :
.....

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. Pour avoir les points d'une ♣ il faut cocher la ou toutes les bonnes réponses.

Utiliser un stylo noir (ou bleu) et il est important de bien **cocher les cases (i.e., ☒)**. Vous pouvez corriger une case cochée par erreur en la **noircissant entièrement (i.e., ■)**. Des points négatifs pourront être affectés à de *mauvaises* réponses (dans limite de 25%).

EXERCICE 1

Question 1 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme LL^T .

Faux. Vrai.

Question 2 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU .

Faux. Vrai.

Question 3 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet une factorisation de Cholesky LL^T , où $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Vrai. Faux.

Question 4 Le principe d'élimination de Gauss appliqué à une matrice $n \times n$ nécessite un nombre d'opération de

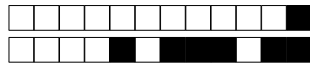
$O(n^3/3)$. $O(n^2)$. $O(n)$. $O(n^{3/2})$.

Question 5 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Choleski.

Faux. Vrai.

Question 6 ♣ Parmi les matrices suivante la ou lesquelles est/sont définies positives ?

<input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
<input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> Aucune de ces réponses n'est correcte.



Question 7 ♣ Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Comment peut-on vérifier si la factorisation de Cholesky $A = LL^T$ est valide sans effectuer de multiplication matricielle ?

- En effectuant une multiplication matricielle LL^T et en comparant le résultat à A .
- Il n'y a pas de méthode pour vérifier la validité de Cholesky sans effectuer de multiplication matricielle.
- En calculant le déterminant de A et en vérifiant s'il est égal au carré du produit des éléments diagonaux de L .
- En vérifiant que L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont tous positifs.
- Aucune de ces réponses n'est correcte.

EXERCICE 2

Question 8 Quel est le nombre total de multiplications/divisions nécessaire lors de la résolution d'un système de la forme $L\vec{x} = \vec{b}$, où $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ et $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure, avec $L_{ii} = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$?

- | | | |
|--------------------------------------|--|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $n^2 + n/2$ | <input type="checkbox"/> $n^2 + n$ | <input type="checkbox"/> n^2 |
| <input type="checkbox"/> $n^2/2$ | <input type="checkbox"/> $n^2 - 3n$ | <input type="checkbox"/> n^3 |
| <input type="checkbox"/> $n^2 - n/2$ | <input type="checkbox"/> $n^2/2 - n/2$ | <input type="checkbox"/> $n^2 + 3n$ |

Question 9 Quel est le nombre total de multiplications/divisions nécessaire lors de la factorisation LU (à l'aide de l'algorithme ci-dessous) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

- | | | |
|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> $n^3/3 + n^2/2 - 5n/6$ | <input type="checkbox"/> $n^3/3 + n/2$ | <input type="checkbox"/> $n^3/3$ |
| <input type="checkbox"/> $n^3/3 - n/3$ | <input type="checkbox"/> $n^3/3 - n^2/2 + n/6$ | <input type="checkbox"/> $n^2 + 3n$ |
| <input type="checkbox"/> $n^2 - 3n$ | <input type="checkbox"/> $n^3/6 - n/2$ | <input type="checkbox"/> $n^3/3 - n/3$ |

Question 10 Quel est le nombre total de multiplications/divisions nécessaire lors de la résolution de m systèmes de la forme $A\vec{x}^{(k)} = \vec{b}^{(k)}$, où $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ et $k = 1, \dots, m$, en factorisant d'abord A puis en résolvant $L\vec{y}^{(k)} = \vec{b}$ et $U\vec{x}^{(k)} = \vec{y}^{(k)}$?

- | | | |
|--|--|---|
| <input type="checkbox"/> $n^3/3 + (m-1/2)n^2 - (m-1/6)n$ | <input type="checkbox"/> $n^3 + 3mn + 3m$ | <input type="checkbox"/> $n^3 - mn/2$ |
| <input type="checkbox"/> $n^3 - mn^2 + 3mn$ | <input type="checkbox"/> $mn^3/6 + mn$ | <input type="checkbox"/> $n^3/3 + mn^2 - n/3$ |
| <input type="checkbox"/> $n^3/6 + mn/2$ | <input type="checkbox"/> $n^3/3 + mn^2 - mn/3$ | <input type="checkbox"/> $n^3/3 - (m+1)n^2 - n/3$ |

Algorithme 1 : Factorisation LU

Entrées : n, a_{ij}

Sorties : l_{ij}, u_{ij}

```

1 pour k = 1 à n faire
2   | lkk = 1
3   | pour j = k à n faire
4     | | ukj = akj - ∑s=1k-1 lksusj
5     | fin
6   | pour i = k + 1 à n faire
7     | | lik = (aik - ∑s=1k-1 lisusk)/ukk
8     | fin
9 fin

```