



⇐ **Cocher** votre numéro d'étudiant ci-contre (premier chiffre dans la première colonne, etc.), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous en **MAJUSCULES**, ainsi que sur votre copie, dans laquelle vous insérerez votre sujet avant restitution.

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

NOM :

.....

PRÉNOM :

.....

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. Pour avoir les points d'une ♣ il faut cocher la ou toutes les bonnes réponses.

Utiliser un stylo noir (ou bleu) et il est important de bien **cocher les cases** (i.e., ☒). Vous pouvez corriger une case cochée par erreur en la **noircissant entièrement** (i.e., ■). Des points négatifs pourront être affectés à de *mauvaises* réponses (dans limite de 25%).

EXERCICE 1

Question 1 On souhaite résoudre $f(x) = 0$, avec $f(x) = \sin(\pi x)$, $-1 < a < 0$ et $2 < b < 3$. Si on suppose que $a + b > 2$, alors la méthode de dichotomie converge vers :

<input type="checkbox"/> 1.	<input type="checkbox"/> 3.
<input type="checkbox"/> 2.	<input type="checkbox"/> -1.
<input type="checkbox"/> 0.	<input type="checkbox"/> Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 2 Si la méthode de dichotomie est utilisée pour résoudre $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ et $[a, b] = [0, 2]$, quelle sera la valeur de x_2 (la deuxième itération) ?

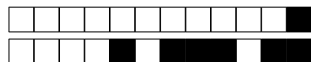
<input type="checkbox"/> 1/2	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 5/4	<input type="checkbox"/> 11/8	<input type="checkbox"/> 3/2	<input type="checkbox"/> 5/2

Question 3 ♣ Quelles sont la ou les hypothèses qui garantissent l'existence d'une solution x^* au problème $f(x) = 0$ pour la méthode de dichotomie ?

<input type="checkbox"/> f change de signe sur l'intervalle $[a, b]$.	<input type="checkbox"/> f ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, b]$.
<input type="checkbox"/> f est dérivable sur $[a, b]$.	<input type="checkbox"/> Aucune hypothèse n'est nécessaire.
<input type="checkbox"/> f est continue sur l'intervalle $[a, b]$.	<input type="checkbox"/> Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 4 Si la méthode de dichotomie est utilisée pour résoudre $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ et $[a, b] = [0, 4]$, à partir de combien d'itération a-t-on $|x_n - x^*| \leq 10^{-1}$?

<input type="checkbox"/> 3.	<input type="checkbox"/> 8.	<input type="checkbox"/> 7.	<input type="checkbox"/> 5.
<input type="checkbox"/> 4.	<input type="checkbox"/> 2.	<input type="checkbox"/> 6.	<input type="checkbox"/> 1.



EXERCICE 2

Question 5 ♣ Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la ou les hypothèses d'existence d'un point fixe $x^* \in [a, b]$ sont satisfaites. Quelles sont alors la ou les hypothèses qui garantissent la convergence de la suite $(x_n)_n$:

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné,} \\ x_{n+1} = g(x_n), & n \geq 0, \end{cases}$$

vers l'unique point fixe $x^* \in [a, b]$.

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $\exists 0 < k < 1$ telle que : $\forall x, y \in [a, b] :$
$ g(x) - g(y) \leq k x - y .$ | <input type="checkbox"/> $\forall x \in [a, b] : g(x) \in [a, b].$ |
| <input type="checkbox"/> g est continue sur l'intervalle $[a, b].$ | <input type="checkbox"/> g change de signe sur l'intervalle $[a, b].$ |
| <input type="checkbox"/> g ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, b].$ | <input type="checkbox"/> Aucune de ces réponses n'est correcte. |

Question 6 Pour laquelle des fonctions ci-dessous est $x^* = \sqrt{5}$ est un point fixe ?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}.$ | <input type="checkbox"/> $g(x) = 1 + \frac{4}{x+1}.$ |
| <input type="checkbox"/> $g(x) = x^2 - 4x.$ | <input type="checkbox"/> $g(x) = \sqrt{5}x.$ |

Question 7 La fonction $g(x) = \pi + \frac{1}{2} \sin(\frac{x}{2})$ admet un unique point fixe x^* dans $[0, 2\pi]$. On suppose que $x_0 = \pi$. En utilisant les valeurs de x_1 et x_0 , déterminer la plus petite majoration de l'erreur $|x_n - x^*|$. A partir de combien d'itération a-t-on $|x_n - x^*| < 10^{-1}$?

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 3. | <input type="checkbox"/> 1. | <input type="checkbox"/> 6. |
| <input type="checkbox"/> 2. | <input type="checkbox"/> 4. | <input type="checkbox"/> 5. |

Question 8 On considère la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10.$$

On souhaite résoudre $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe.

Vrai ou Faux : On suppose que $x_0 = 3/2$, la suite $(x_n)_n$ converge dans le cas suivant :

$$g(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}, [a, b] = [1, 2].$$

- | | |
|--------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> Faux. | <input type="checkbox"/> On ne peut pas |
| <input type="checkbox"/> Vrai. | conclure. |

EXERCICE 3

Question 9 Si la méthode de Newton est utilisée pour résoudre $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^5 - x^3 + 3$ et $x_n = 1$, quelle sera la valeur de x_{n+1} ?

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> -1 | <input type="checkbox"/> -1/2 | <input type="checkbox"/> 1/2 |
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 |

Question 10 ♣ On souhaite approcher la racine carré d'un nombre positif a par la méthode de Newton. Quelle sont la ou les suites associées ?

- | | | |
|---|--|---|
| <input type="checkbox"/> $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{a}{x_n})$ | <input type="checkbox"/> $x_{n+1} = x_n + \frac{a}{x_n}$ | <input type="checkbox"/> Aucune de ces réponses |
| <input type="checkbox"/> $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ | <input type="checkbox"/> $x_{n+1} = x_n - \frac{a}{x_n}$ | n'est correcte. |