CC1 2023 - Correction

Aymeric Jan (aymeric.jan@univ-paris1.fr)

February 2024

Question 1

Tout d'abord, remarquons que $\sin(\pi x) = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{N}$.

Appliquons l'algorithme de dichotomie.

A la première étape, on a $f(a) < 0$. De plus, $x_1 = \frac{a+b}{2} > 1$ par hypothèse.

Donc $f(x_1) < 0$ ce qui donne $f(a)f(x_1) > 0$. A la prochaine itération, notre interval est donc $[x_1, b] =]1, 3[$.

$\boxed{\text{La seule solution se trouvant dans cet interval est } 2 \Rightarrow x_n \to 2}$

Question 2

Nous avons $x_1 = \frac{a+b}{2} = 1$, il suffit ensuite de déterminer x_2.

Regardons $f(a) = f(0) = -10$ et $f(x_1) = f(1) = -5$ donc $f(a)f(x_1) > 0$.

Ainsi, $\boxed{x_2 = \dfrac{x_1 + b}{2} = \dfrac{3}{2}}$

Question 3

Les hypothèses de la dichotomie sont la $\boxed{\text{continuitée}}$ et le $\boxed{\text{changement de signe}}$.

Question 4

Pour la dichotomie, nous avons la borne d'erreur suivante

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Ainsi, si nous souhaitons majorer l'erreur par $\epsilon = 0.1$ il suffit de trouver n.

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \epsilon \Leftrightarrow n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right) = \log_2(40)$$

Ainsi, on a donc $\boxed{n = 6}$

n	1	2	3	4	5	6
2^n	2	4	8	16	32	64

Figure 1: Valeurs de 2^n

Question 5

L'existence d'un point fixe implique que $g : [a, b] \to [a, b]$ soit continue.

$\boxed{\text{La seule hypothèse manquante soit que la fonction soit contractante.}}$

Question 6

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} \Rightarrow g\left(\sqrt{5}\right) = \sqrt{\sqrt{5}}$$

$$g(x) = x^2 - 4x \Rightarrow g\left(\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}\left(\sqrt{5} - 4\right) \neq \sqrt{5}$$

$$g(x) = \sqrt{5}x \Rightarrow g\left(\sqrt{5}\right) = 5$$

$$g(x) = 1 + \frac{4}{x+1} \Rightarrow g\left(\sqrt{5}\right) = 1 + \frac{4}{\sqrt{5}+1} = 1 + \frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = 1 + \frac{4(\sqrt{5}-1)}{5-1}$$

$$= 1 + \frac{4}{x+1} \Rightarrow g\left(\sqrt{5}\right) = 1 + \frac{4(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{4 + 4(\sqrt{5}-1)}{4} = \sqrt{5}$$

Il s'agit donc de

$$\boxed{g(x) = 1 + \frac{4}{x+1}}$$

Question 7

La majoration de l'erreur la plus précise est la suivante

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$$

Commençons par chercher k.

$$|g(x) - g(y)| = \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right| = \frac{1}{4}|x - y|$$

On a donc $k = \frac{1}{4}$

De plus, on a montré que

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{(1-k)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right)}{\log(k)}$$

Ce qui donne

$$\boxed{n \geq \frac{\log\left(\frac{3}{20}\right)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\log\left(\frac{20}{3}\right)}{\log(4)} \approx \frac{3}{2} \Rightarrow n = 2}$$

Question 8

Si $x_0 = \frac{3}{2}$ alors $x_1 = g(x_0) \approx 0.8$, on remarque que x_1 sort de l'interval $[1, 2]$. Calculons les itérations suivantes:

n	1	2	3
x_n	0.816	2.9969	$\sqrt{-8.65}$

Figure 2: Valeurs de x_n

La suite sort de $\mathbb{R}$, on peut donc conclure que $\boxed{\text{la suite ne converge pas.}}$

Question 9

Par la méthode de Newton, on obtient

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^5 - x^3 + 3}{5x^4 - 3x^2}$$

Donc on a

$$\boxed{x_{n+1} = g(1) = -\frac{1}{2}}$$

Question 10

Pour approximer $\sqrt{a}$, nous pouvons chercher la solution de l'équation $x^2 - a = 0$. Avec la méthode de Newton, nous pouvons consturire g

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = x - \frac{x}{2} - \frac{a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Ainsi, la réponse est

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}$$